

Matematyka Poziom rozszerzony

Listopad 2010

W kluczu są prezentowane przykładowe prawidłowe odpowiedzi. Należy również uznać odpowiedzi ucznia, jeśli są inaczej sformułowane, ale ich sens jest synonimiczny wobec schematu, oraz inne odpowiedzi, nieprzewidziane w kluczu, ale poprawne.

Numer zadania	Zdający otrzymuje po 1 punkcie za	Suma punktów
1.	<p>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp Zdający sprowadzi wyrażenie do najprostszej postaci</p> $\frac{(9x^2 - 4)(x + 1)}{3x^3 + 2x^2 - 3x - 2} = \frac{(3x - 2)(3x + 2)(x + 1)}{(3x + 2) \cdot x^2 - (3x + 2)} = \frac{(3x + 2)(3x - 2)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(3x + 2)} = \frac{3x - 2}{x - 1},$ <p>gdzie $x \neq 1, x \neq -1, x \neq -\frac{2}{3}$.</p>	1 pkt
	<p>pokonanie zasadniczych trudności zadania Zdający zapisze iloraz w postaci sumy dwóch składników, z których jeden jest liczbą całkowitą. Np.:</p> $\frac{3x - 2}{x - 1} = \frac{3(x - 1) + 1}{x - 1} = 3 + \frac{1}{x - 1}$	2 pkt
	<p>rozwiązanie zadania do końca, ale z usterkami Zdający rozważy tylko dzielniki liczby 1, będące liczbami naturalnymi, lub nie sprawdzi, czy znalezione liczby należą do dziedziny wyrażenia.</p>	3 pkt
	<p>rozwiązanie pełne Zdający zauważy, że wartość wyrażenia jest liczbą całkowitą, gdy $x - 1$ jest dzielnikiem 1. $x - 1 = 1$ lub $x - 1 = -1$ Zdający zapisze odpowiedź. $x = 2$ lub $x = 0$ – obie te liczby należą do dziedziny wyrażenia.</p>	4 pkt
2.	<p>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania Zdający wyróżni przedziały: $(-\infty, -2), \langle -2, 4), \langle 4, \infty)$.</p>	1 pkt
	<p>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp Zdający zapisze równanie w poszczególnych przedziałach. Np.:</p> $\begin{aligned} x \in (-\infty, -2) & \quad -x - 2 + x - 4 = 6 \\ x \in \langle -2, 4) & \quad x + 2 + x - 4 = 6 \\ x \in \langle 4, \infty) & \quad x + 2 - x + 4 = 6 \end{aligned}$	2 pkt
	<p>pokonanie zasadniczych trudności zadania Zdający rozwiąże równania. Zdający ustali, że dla $x \in (-\infty, -2)$ równanie nie ma rozwiązania, dla $x \in \langle -2, 4)$ równanie nie ma rozwiązania, dla $x \in \langle 4, \infty)$ równanie jest tożsamościowe – każda liczba rzeczywista należąca do tego przedziału spełnia równanie.</p>	3 pkt

Numer zadania	Zdający otrzymuje po 1 punkcie za	Suma punktów
	<p><i>rozwiązanie pełne</i> Zdający poda odpowiedź: Do przedziału $\langle 4, \infty \rangle$ należy co najmniej jedna liczba niewymierna, np. $\sqrt{39}$. Liczba ta należy do zbioru rozwiązań równania.</p>	4 pkt
3.	<p><i>rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i> Zdający obliczy długość r promienia okręgu i jego średnicę d. $2\pi r = 13\pi$ $r = 6,5$ $d = 13$</p>	1 pkt
	<p><i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i> Zdający zauważy, że przekątna trapezu jest prostopadła do jednego z ramion (kąt wpisany oparty na średnicy jest prosty) i obliczy długość x tego ramienia. $x^2 + 12^2 = 13^2, x = 5$</p>	2 pkt
	<p><i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i> Zdający obliczy wysokość trapezu. $13 \cdot h = 12 \cdot 5, h = \frac{60}{13}$</p>	3 pkt
	<p><i>rozwiązanie prawie całkowite</i> Zdający zauważy, że trapez jest równoramienny i obliczy długość krótszej podstawy. $b = \frac{119}{13}$</p>	4 pkt
	<p><i>rozwiązanie pełne</i> Zdający obliczy pole trapezu. $P = \frac{1}{2} \left(13 + \frac{119}{13} \right) \cdot \frac{60}{13} = 51 \frac{21}{169}$</p>	5 pkt
4.	<p><i>rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i> Zdający zapisze wielomian $W(x)$ za pomocą wielomianu niezerowego $Q(x)$, wielomianu $P(x)$ i reszty $R(x) = ax^2 + bx + c$. $W(x) = Q(x) \cdot P(x) + ax^2 + bx + c$</p>	1 pkt
	<p><i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i> Zdający zauważy, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - a$ jest równa $W(a)$ i zapisze odpowiednie równości. $a + b + c = 1$ $a - b + c = -1$ $4a - 2b + c = 3$</p>	2 pkt
	<p><i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i> Zdający rozwiąże otrzymany układ równań. $a = \frac{5}{3}, b = 1, c = -\frac{5}{3}$</p>	3 pkt
	<p><i>rozwiązanie pełne</i> Zdający zapisze resztę. $R(x) = \frac{5}{3}x^2 + x - \frac{5}{3}$</p>	4 pkt
5.	<p><i>rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i> Zdający obliczy wyróżnik trójmianu. $\Delta = (m - 5)^2 - 4(m - 7) = m^2 - 14m + 53$</p>	1 pkt

Numer zadania	Zdający otrzymuje po 1 punkcie za	Suma punktów
	<p><i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i> Zdający zapisze wyróżnik np. w postaci $\Delta = (m - 7)^2 + 4$ i stwierdzi, że wartość tego wyrażenia jest zawsze dodatnia, zatem równanie ma dla każdej liczby rzeczywistej m dwa różne pierwiastki.</p>	2 pkt
	<p><i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i> Zdający zapisze warunek podany w zadaniu, wykorzystując np. wzory Viete'a. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = [-(m - 5)]^2 - 2 \cdot (m - 7) = m^2 - 12m + 39$</p>	3 pkt
	<p><i>rozwiązanie prawie całkowite</i> Zdający zapisze sumę kwadratów pierwiastków równania w postaci $x_1^2 + x_2^2 = (m - 6)^2 + 3$.</p>	4 pkt
	<p><i>rozwiązanie pełne</i> Zdający stwierdzi, że wartość wyrażenia $(m - 6)^2 + 3$ jest najmniejsza, gdy $m = 6$.</p>	5 pkt
6.	<p><i>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i> Zdający obliczy wysokość H graniastoslupa i długość x jego krawędzi podstawy. $6x + 3H = 60$ $6x + 3(x + 2) = 60$ $x = 6, H = 8$</p>	1 pkt
	<p><i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i> Zdający sporządzi rysunek graniastoslupa, zaznaczając odpowiedni przekrój lub narysuje odpowiedni trójkąt.</p> <div style="text-align: center;"> </div>	2 pkt
	<p><i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i> Zdający obliczy długość c przekątnej ściany bocznej graniastoslupa i długość ramienia a trójkąta, będącego przekrojem. $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ $a = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$</p>	3 pkt
	<p><i>rozwiązanie prawie całkowite</i> Zdający stwierdzi, że rozpatrywany przekrój jest trójkątem równoramiennym o podstawie 10 i ramieniu $\sqrt{52}$ i obliczy wysokość tego trójkąta. $h = \sqrt{52 - 25} = \sqrt{27}$</p>	4 pkt
	<p><i>rozwiązanie pełne</i> Zdający obliczy pole przekroju. $P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{27} = 15\sqrt{3}$</p>	5 pkt

Numer zadania	Zdający otrzymuje po 1 punkcie za	Suma punktów
7.	<p><i>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i></p> <p>Zdający przekształca rozpatrywane wyrażenie, wykorzystując odpowiednie wzory. $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) =$ $= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$</p>	1 pkt
	<p><i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i></p> <p>Zdający wykorzystuje związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta do zapisania wyrażenia za pomocą jednej funkcji trygonometrycznej. Np.: $\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta).$</p>	2 pkt
	<p><i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i></p> <p>Zdający przekształca otrzymane wyrażenie do postaci $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1.$</p>	3 pkt
	<p><i>rozwiązanie pełne</i></p> <p>Zdający zauważy, że $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \leq 2$, zatem $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1 \leq 1$.</p>	4 pkt
8.	<p><i>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i></p> <p>Zdający wykaże, że utworzone w ten sposób czworokąty są kwadratami – C_1 jest rombem, w którym każdy kąt ma miarę 90°, jest więc kwadratem. Podobnie następne czworokąty są kwadratami.</p>	1 pkt
	<p><i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i></p> <p>Zdający wykaże, że pole każdego z następnych kwadratów jest równe połowie pola kwadratu, z którego powstał.</p>	2 pkt
	<p><i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i></p> <p>Zdający zauważy, że ciąg pól tworzonych kwadratów jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie 8 i ilorazie $\frac{1}{2}$.</p>	3 pkt
	<p><i>rozwiązanie prawie całkowite</i></p> <p>Zdający zastosuje wzór na sumę m wyrazów ciągu geometrycznego, tworząc i rozwiązując odpowiednie równanie. $8 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m}{1 - \frac{1}{2}} = 15 \frac{3}{4}$ $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{63}{64}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{1}{64}$ $m = 6$</p>	4 pkt
	<p><i>rozwiązanie pełne</i></p> <p>Zdający wyznaczy liczbę n. $n = 6 - 1 = 5$</p>	5 pkt

Numer zadania	Zdający otrzymuje po 1 punkcie za	Suma punktów
9.	<p><i>rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i> Zdający zapisze za pomocą wyrażenia algebraicznego prawdopodobieństwo wyciągnięcia dwóch skarpetek zielonych. x – liczba skarpetek zielonych</p> $P(ZZ) = \frac{x}{3x} \cdot \frac{x-1}{3x-1}$	1 pkt
	<p><i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i> Zdający zapisze za pomocą wyrażenia algebraicznego prawdopodobieństwo wyciągnięcia dwóch skarpetek różnych kolorów.</p> $P(RK) = \frac{x}{3x} \cdot \frac{2x}{3x-1} + \frac{2x}{3x} \cdot \frac{x}{3x-1}$	2 pkt
	<p><i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i> Zdający zapisze odpowiednie równanie i sprowadzi je do najprostszej postaci.</p> $\frac{x}{3x} \cdot \frac{x-1}{3x-1} + \frac{13}{33} = \frac{x}{3x} \cdot \frac{2x}{3x-1} + \frac{2x}{3x} \cdot \frac{x}{3x-1}$ $\frac{x-1}{3x-1} + \frac{39}{33} = \frac{4x}{3x-1}$	3 pkt
	<p><i>rozwiązanie prawie całkowite</i> Zdający rozwiąże równanie – obliczy liczbę skarpetek zielonych. $x = 4$</p>	4 pkt
	<p><i>rozwiązanie pełne</i> Zdający poda liczbę wszystkich skarpetek: $4 + 8 = 12$.</p>	5 pkt
10.	<p><i>rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i> Zdający zapisze równanie okręgu $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 17$ i zauważy, że każdy punkt leżący na osi OX ma współrzędne $(x, 0)$.</p>	1 pkt
	<p><i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i> Zdający wyznaczy współrzędne punktów przecięcia okręgu z osią OX.</p> $(x-2)^2 + 1 = 17$ $(x-2)^2 - 16 = 0$ $x-2-4 = 0 \text{ lub } x-2+4 = 0$ $x = 6 \text{ lub } x = -2$ $A = (6, 0)$ $B = (-2, 0)$	2 pkt
	<p><i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i> Zdający wyznaczy długość odcinka AB: $AB = 8$ oraz odległość d punktu C od osi OX.</p> $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot d = 24$ $d = 6$	3 pkt
	<p><i>rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)</i></p>	4 pkt

Numer zadania	Zdający otrzymuje po 1 punkcie za	Suma punktów
	<p><i>rozwiązanie pełne</i> Zdający wyznaczy pierwszą współrzędną punktu C, wiedząc, że druga współrzędna jest równa 6 lub -6. $3x - 6 + 3 = 0$ lub $3x - (-6) + 3 = 0$ $x = 1$ lub $x = -3$ Zdający poda współrzędne punktu C. $C = (1, 6)$ lub $C = (-3, -6)$</p>	5 pkt
11.	<p><i>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i> Zdający zauważy, że wykres funkcji f powstał w wyniku przekształcenia przez symetrię względem osi OX wykresu funkcji $\sin ax$ oraz dwukrotnego „rozciągnięcia” go wzdłuż osi OY. Okresem funkcji $\sin ax$ jest π, stąd $a = 2$.</p>	1 pkt
	<p><i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i> Zdający zapisze wzór funkcji. $f(x) = 2(-\sin 2x) = -2 \sin 2x$</p>	2 pkt
	<p><i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i> Zdający zapisze i przekształci odpowiednie równanie $-2 \sin 2x = -\sqrt{3}$ $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $2x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{C}$</p>	3 pkt
	<p><i>rozwiązanie pełne</i> Zdający poda rozwiązanie równania. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{C}$</p>	4 pkt